Come costruire un antico orologio conico

di Riccardo Anselmi

La difficoltà di disporre di un blocco di marmo e di scolpirlo, per ricavarne un orologio solare conico simile a quelli usati dai greci e dai romani (*fig. 1*), mi ha suggerito di sperimentare una diversa tecnica, meno laboriosa e meno costosa, adatta a chi ha l'intenzione di cimentarsi nella costruzione di un tal orologio solare, utilizzando per la realizzazione una superficie di materiale pieghevole e facilmente modellabile.
Ricordo brevemente alcune caratteristiche di questi

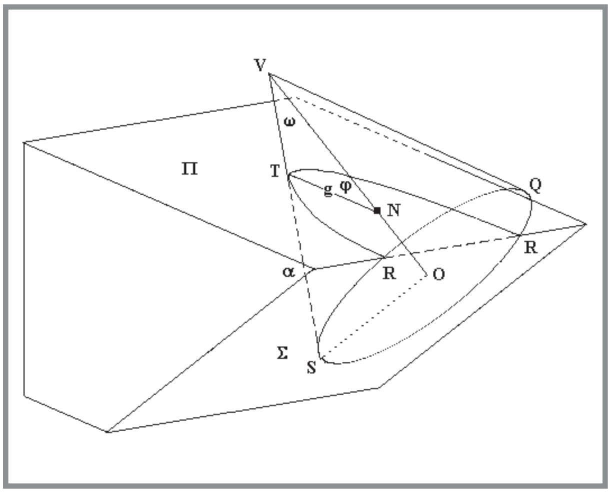

fig. 1 *Orologio solare conico.*

quadranti solari rinvenuti in oltre cento esemplari nell'area mediterranea. L'orologio va rivolto verso sud; l'asse del cono è puntato sulla polare; l'apertura del cono determina il profilo orizzontale; il sistema orario è quello temporario. Il loro grado di precisione è discutibile un po' come quello di molti orologi che risalgono alla stessa epoca, dato che alcuni sono copie eseguite da scalpellini inesperti di gnomonica.
Un orologio solare di questo tipo è costituito da una superficie conica che si può considerare appoggiata, in parte, su un profilo circolare e, in parte, sopra una sagoma ellittica o iperbolica.

Il cono, come si evince dalla figura 1, in assonometria, e dalla figura 2, si presenta sezionato da due piani: quello orizzontale, sul quale sporge lo stilo, e quello obliquo, ortogonale all'asse del cono. La prima sezione può essere ellittica, iperbolica e, come caso limite, parabolica; la seconda, invece, è sempre circolare.
In teoria, è sufficiente disporre di questi due profili, opportunamente posizionati secondo l'angolo α, pari alla

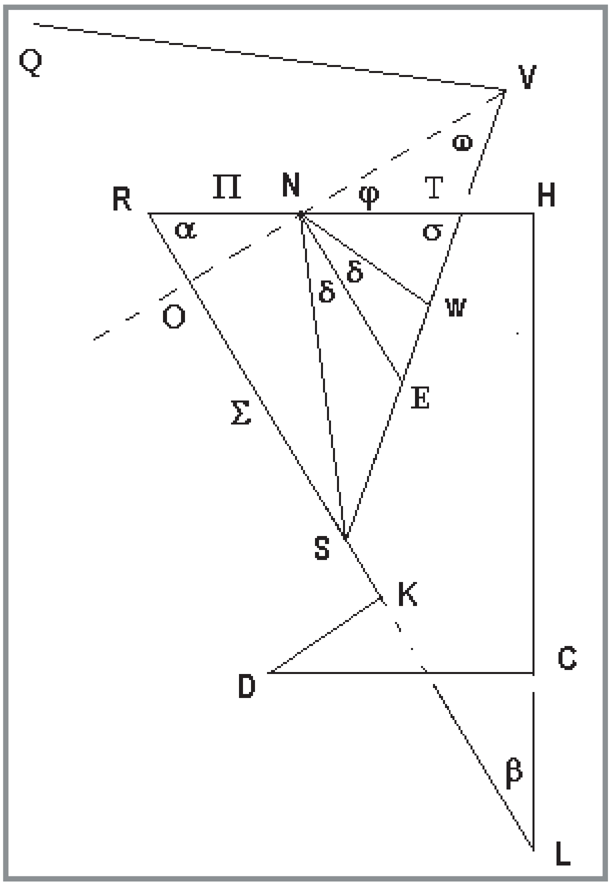

fig. 2 *Sezione laterale dell'orologio solare conico.*

colatitudine, farvi aderire una superficie in modo che combaci esattamente con gli stessi, per ottenere la zona del cono da utilizzare come quadrante.

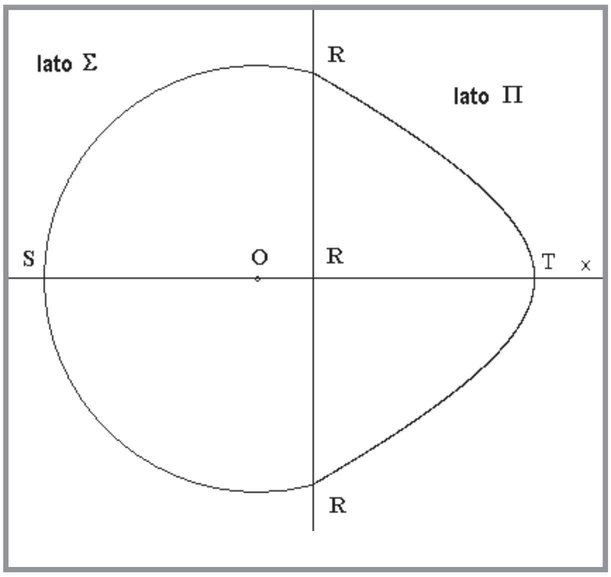

fig. 3 *Sezioni delle sagome intagliate.*

Bisogna, poi, realizzare un grafico con il ventaglio delle linee orarie, adagiarlo sulla superficie per il trasferimento delle stesse, per avere a disposizione un metodo sicuramente più accessibile di quello necessario per affrontare lo stesso lavoro su di un blocco di marmo, ottenendo, nel contempo, un leggerissimo e maneggevole esemplare di meridiana conica.

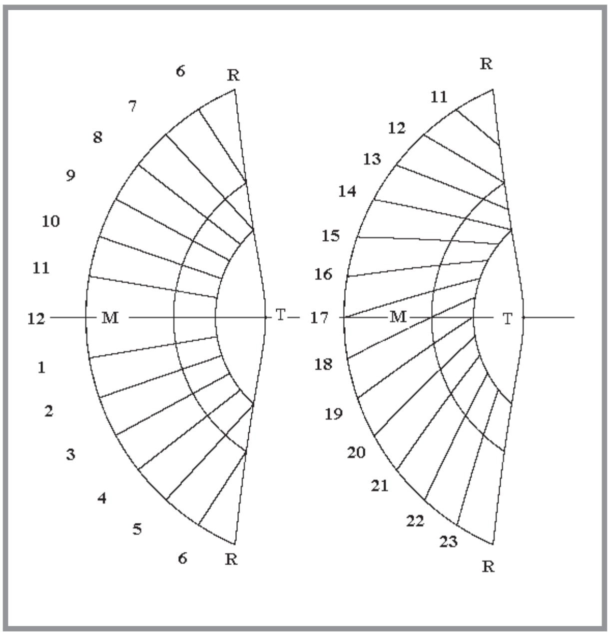

fig. 5 a) *Sistema orario astronomico,* b) *sistema orario italico.*

Il materiale usato per realizzare il modello della fotografia è costituito da legno compensato da 5 mm, per le parti piane, e da legno per ebanisti o per modellismo, in fogli sottilissimi da 1 mm o meno di spessore, per la parte curva.

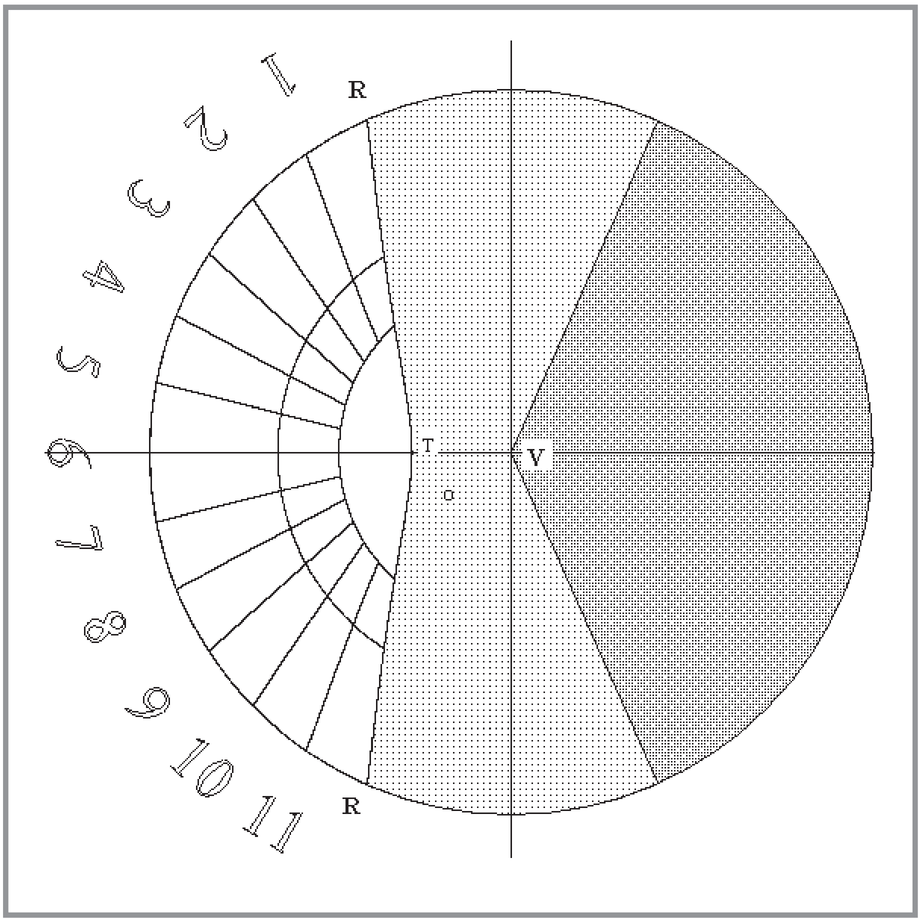

fig. 4 *Sviluppo del cono sul piano.*

Per questo lavoro ho dovuto creare un apposito programma che mi tracciasse sia i due profili sia il quadrante vero e proprio. Fortunatamente il cono è un solido sviluppabile su superficie piana, proprietà che ha permesso di stampare la perfetta sagoma del quadro su fogli di carta in formato A4.

In figura 2 la poligonale RHCDK rappresenta il quadrante solare, comprensivo dello zoccolo di sostegno, visto in sezione.

Il piano Π è orizzontale: su di esso viene intagliato il profilo calcolato. Dal piano Σ, si ricava il cerchio, base del cono QVS di angolo di semiapertura ω. NT è lo stilo, δ è pari a 23,45°, W e S sono, rispettivamente, i limiti del quadrante sulla linea del mezzogiorno VS, E

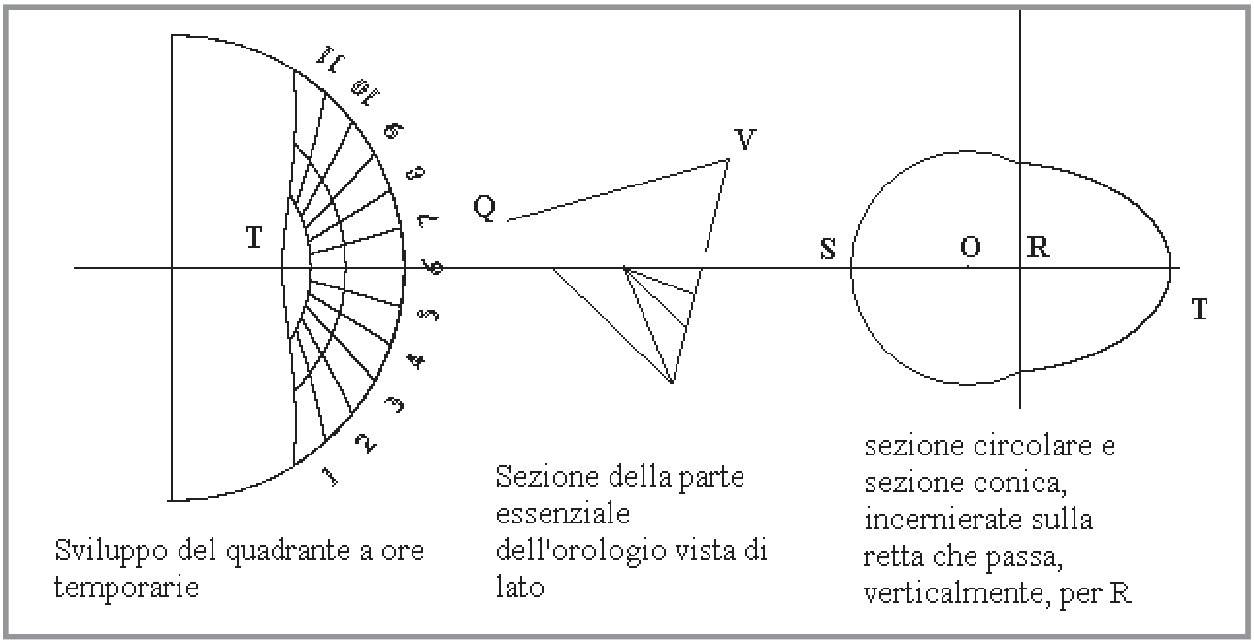

fig. 6

è l'intersezione del piano dell'equatore celeste con questa linea.

Consideriamo soltanto le parti dianzi indicate: le due sezioni e il quadrante conico vero e proprio. La figura 3 mostra il profilo circolare e quello, in questo caso, iperbolico nella loro esatta proporzione e posizione reciproca rispetto al segmento RR, spigolo del diedro ΣΠ. In figura 4 si osserva lo sviluppo del cono su piano. Si notano tre aree a diverso contrasto. Quella più scura deve essere eliminata in quanto la parte della superficie che interessa è limitata alle altre due zone. Dopo avere ottenuto il disegno di figura 4, se si toglie la parte più scura e si uniscono i lembi del settore circolare rimanente, si ottiene la parte della superficie del cono che contiene il quadro delle ore e delle linee diurne. Anche la seconda parte punteggiata deve essere scartata perché non è interessata al disegno del quadrante solare. La terza ed ultima parte, costituita dall'intreccio delle ore con le linee diurne, è quella utile. Per comodità del lettore, ho indicato, con i numeri da 1 a 11, le linee a ore temporarie di questi orologi. La linea curva RTR, delimitante le ultime due zone, rappresenta l'orizzonte. Tutte le linee orarie, ad esclusione della linea del mezzogiorno che si presenta rettilinea, sono curve trascendenti. La linea del tramonto e dell'alba, malgrado la sua forma sinuosa, una volta che il quadro delle ore è collocato nella sua sede conica, ne segue esattamente il bordo. I dati usati per questo orologio sono quelli relativi all'orologio conico di Abu Mina, rinvenuto in Egitto, cui ho già dedicato un articolo, tempo addietro. Si propongono qui di seguito alcune formule necessarie per il calcolo di alcuni parametri del quadrante solare conico.
I dati essenziali sono:
la latitudine φ, la semiamplitudine ω del cono e la lunghezza g dello stilo orizzontale.

$$g = NT; r_\delta = \frac{g\sin(\varphi+\omega)\cos\delta}{\cos(\omega+\delta)}$$

che, per δ = 23,45°, rappresenta il raggio OS del cerchio sezione; $Rg = r_\delta / \sin\omega$, ovvero il raggio VS del cerchio di sviluppo. Lo stilo viene fissato nel punto T da cui sporge, orizzontalmente, al di sopra del quadro, in direzione sud. Solo l'ombra della sua punta funziona da indicatore. In teoria lo stilo potrebbe essere fissato sul quadro sopra la linea meridiana alla distanza d = g*cos(φ+ω) dal punto T. In questo caso l'ortostilo avrebbe lunghezza l = g*sin(φ+ω).
La figura 5 (a, b) rappresenta due tracciati con i sistemi orari astronomico e italico, sconosciuti all'epoca dei greci e dei romani. Si tratta di un'interessante curiosità che consente di verificare la validità del quadrante conico secondo questi sistemi orari più recenti.
La composizione base è costituita da sei facce piane, di cui un'inclinata, e di quella conica. L'orologio solare conico è stato calcolato per la latitudine di Aosta con un angolo di semiapertura ω di 30° ed uno stilo orizzontale di 83 mm. La figura 7 mostra il quadrante, la sezione e, a destra, il doppio foro. Si nota che il valore particolare dell'angolo ω crea uno sviluppo di 180° gradi esatti. La generatrice VQ ha un'inclinazione di segno opposto a quella del primo esempio e, conseguentemente, si ha un'ellisse su Π. Se tale elemento fosse orizzontale la conica sarebbe una parabola.

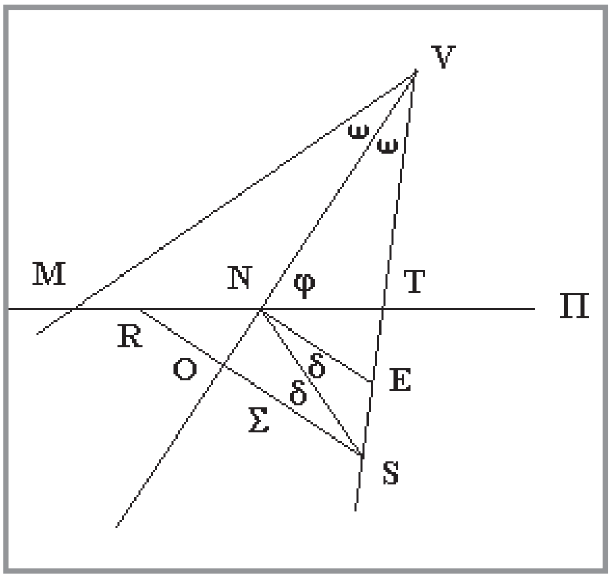

fig. 7 *Sezione laterale.*

Le fotografie mostrano un orologio conico, realizzato recentemente, ripreso da punti di vista differenti onde consentirne una visione più completa. Il manufatto risulta leggerissimo, facilmente trasportabile e, quindi, adatto a esposizioni e a dimostrazioni. Lo stilo è stato ricavato da una spatola per stucco, opportunamente sagomata. La sua flessibilità lo rende particolarmente immune ai piccoli urti. Direi che l'unico lato negativo di questo quadrante è quello di non poter essere lasciato, permanentemente all'aperto, ma evidentemente, non è stato costruito per questo scopo. La tecnica di assemblaggio consente la realizzazione di orologi conici di dimensioni molto piccole, utilizzabili anche come soprammobili.

Usando l'apposito software si possono ottenere facilmente i tracciati orari secondo i sistemi astronomico, italico e babilonico. Questi grafici, stampati direttamente su fogli A4, in seguito ad opportuni adattamenti, possono essere appoggiati su quello esistente ad ore temporarie senza che ne venga pregiudicata la precisione della lettura.

Vediamo ora la teoria matematica necessaria per risolvere il problema esposto.

Dalla figura 7 si ricava: NT = g; MT = 2a; MN = 2a – g. Angoli: $-23,45° \le \delta \le 23,45°$; TRS = 90°- φ; VNE = 90°; TNE = 90°- φ; NTE = φ + ω; NET = 90° - ω; NST = 90°- (ω + δ). Inoltre RN = NO/cosφ dove NO = OS* tan(23,45°); OR = NO* tanφ.

Nell'equazione polare della conica con origine nel fuoco:

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\vartheta}, \quad \varepsilon = \frac{\cos\varphi}{\cos\omega}$$

è l'eccentricità e $p = \frac{b^2}{a}$ è una costante in cui a e b sono rispettivamente semiasse maggiore e semiasse minore. Sempre dalla figura 7 si ricava

$$a = \frac{g}{2}\left(\frac{\sin(\varphi+\omega)}{\sin(\varphi-\omega)}+1\right) \text{da cui, } c = \varepsilon * a,$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Le coordinate cartesiane della conica (in questo caso un'ellisse), con origine nel fuoco, sono: $x = \rho\cos\vartheta,\ y = \rho\sin\vartheta$, formule di facile applicazione dentro un algoritmo da computerizzare. Facendo variare ϑ, ϱ assume nuovi valori. Le coordinate di un punto della conica sono funzioni sia ϑ di sia di ϱ.

Con queste coordinate si traccia l'ellisse, sezione del cono con il piano orizzontale Π.

Dalla figura 7, per δ = 23,45°, si ricava anche il raggio OS del cerchio sezione del cono con il piano Σ:

$$OS = g\frac{\sin(\varphi+\omega)\cos\delta}{\cos(\omega+\delta)}.$$

Il cono sviluppato (*fig. 8*) appare come un settore circolare di ampiezza $2\pi\sin\omega$, il cui raggio è il tratto di generatrice Rg = VS = OS/sinω. Risulta $RS = OS * H$ essendo H l'arco semidiurno al solstizio estivo che si ricava dalla nota formula $\cos H = -\tan\varphi * \tan\delta$ per $\delta = 23,45°$. Per valori di δ minori di 23,45° si riducono OS e H. Conseguentemente anche RS si restringe. Un punto di RS coincidente con un dato punto orario, per esempio con l'ora prima del tramonto, avrà una nuova posizione R' sul grafico, al variare di

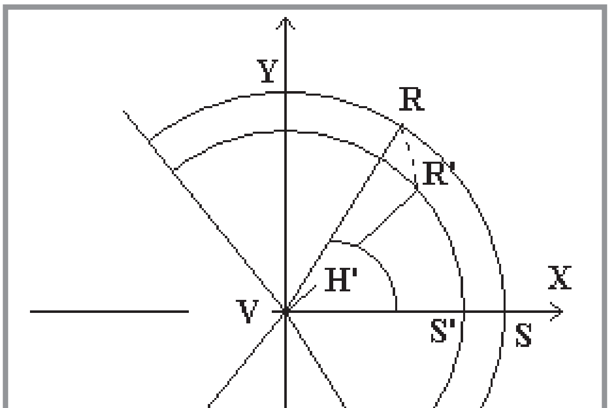

fig. 8 *Creazione della linea oraria temporaria.*

δ. Se si uniscono tutti i punti ottenuti al variare di δ si ottiene la linea oraria temporaria relativa all'ora succitata (h = 11). Le coordinate cartesiane di R sono $x = Rg\cos H'$, $y = Rg\sin H'$.

Si ha $RS = OS * H$ ma anche $RS = RV * H'$ da cui si ottiene $H' = H * \sin\omega$. La linea dell'orizzonte si traccia facilmente ricordando che ad *H* corrisponde l'intero arco semidiurno. Le linee orarie si ottengono dalle coordinate cartesiane di R, variando *H'* secondo la formula $H' = H * \sin\omega * n / 6$ con n = 0,1,2...Per n = 0 si ottiene la sesta ora, quella che coincide con il mezzogiorno. Per n = 6 si ottiene la linea oraria coincidente con il tramonto del sole, in pratica un tratto della linea dell'orizzonte. Se la sezione orizzontale è un'iperbole o una parabola, la costante p dell'equazione polare della conica richiede un calcolo a parte. Nel caso dell'iperbole porre

$$a = \frac{g * \sin\varphi * \cos\omega}{\sin(\omega - \varphi)}, \quad c = \varepsilon * a, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2};$$

in quello della parabola si ha:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}, \quad p = 2g\sin^2\varphi.$$

Il software per tracciare l'orologio descritto in questo articolo può essere richiesto direttamente all'autore del presente articolo (email riccardo.anselmi@alice.it.)

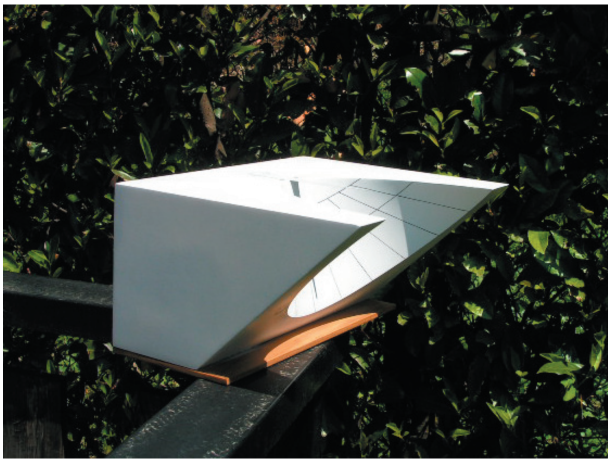

fig. 9 *Ricostruzione dell'orologio conico.*

Bibliografia

ANSELMI, RICCARDO (2000), *La meridiana conica di Abu Mina*, in «Gnomonica», Allegato Astronomia UAI, n.7, settembre, pp. 6-17.

GIBBS, SHARON L. (1976), *Greek and Roman Sundials*, Yale University Press, New Haven and London.

SEVERINO, NICOLA (2003), *Orologi Solari Greco-Romani*, Cd Rom, Roccasecca.

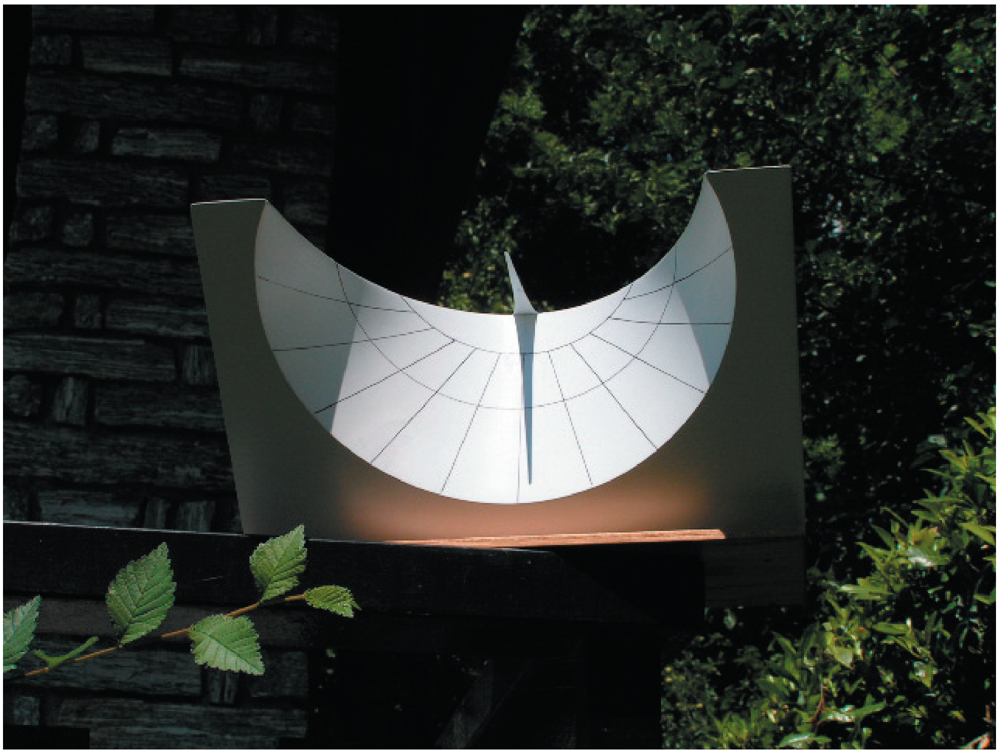

fig. 10 *Ricostruzione dell'orologio conico visto frontalmente.*